ZÁKLADY FYZIKY I
pro posluchače 1. ročníku denního studia Dop. fakulty J. Pernera UPa

ZÁKLADNÍ VZTAHY VEKTOROVÉ ALGEBRY VE FYZICE
(Basics of Vector Algebra in Physics)

VEKTOROVÁ ANALÝZA

Úvod

Veličiny ve fyzice se zpravidla dělí na **skalární** a **vektorové**.a zabývá se jimi partie matematiky zvaná **vektorový počet**. Pravidly počítání s vektorovými veličinami se zabývá **vektorová algebra** a jejich zkoumáním pak **vektorová analýza**. Obě skupiny veličin jsou kvalitativně charakteristické (odlišné) mírou informace, kterou representují. Zatímco skalární veličiny, zkráceně **skaláry**, obsahují **jedinou informaci** vyjádřitelnou jedním číslem, vektorové veličiny, tj. **vektory**, mají navíc údaj o **prostorové dimensi**. Tento údaj zjednodušeně vyplývá z fyzikální povahy veličiny, její definice a charakteristiky prostoru (popř. časoprostoru v relativistické fyzice). Teprve úplný popis charakterisuje danou fyzikální vektorovou veličinu jednoznačně.

Během pokroku v exaktních vědách (matematika, fyzika) došlo k potřebě charakterizovat komplexnější veličiny než jsou dosud uvedené skaláry a vektory. Touto entitou se nazval **tensor** a celá partie matematické syntésy se zabývá tzv. **tensorovým počtem**. Hierarchicky lze vektory považovat za podmnožinu tensorů a taktéž skaláry za podmnožinu vektorů. Matematicky

$$x \subset \boldsymbol{a} \subset \boldsymbol{u} \qquad (1)$$

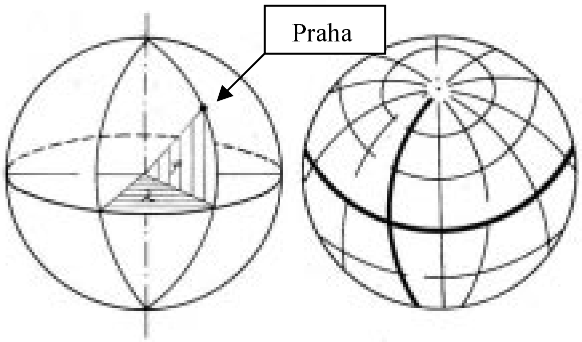
kde x je skalár, $\boldsymbol{a}$ vektor a $\boldsymbol{u}$ tensor. Ve fyzice má praktický význam tensor druhého řádu, v teorii tzv. tensorového počtu existují dále tensory 3, 4, …, n-tého řádu.

Příkladem skaláru, tj. jednoznačně určené fyzikální veličiny jediným číselným údajem, je hmotnost, hustota, teplota, elektrické napětí. Matematicky, kde abstrahujeme od měřících jednotek a od názvů veličin, představuje skalár **reálné číslo**, které navíc podle povahy veličiny je celé, nezáporné atd., ale vždy měřitelné pomocí jediné stupnice či měřítka (z řečtiny *scala* – stupnice). Jedná se o nejjednodušší fyzikální veličinu, která je i v n-rozměrném prostoru dána jediným údajem - velikostí.

Vektorové veličiny, jak již bylo uvedeno, obsahují navíc informaci o prostoru, ve kterém daný jev vyšetřujeme nebo jej k němu vztahujeme. Tyto informace, **vektorové atributy**, zahrnují:

- počátek či působiště,
- směr a
- orientaci.

Příkladem budiž úspěšný dálkový let prvního stroje těžšího vzduchu na území tehdejší habsburské monarchie, předchůdce dnešní Evropské unie: Ing. Jan Kašpar uskutečnil svůj historický první let z Pardubic do pražských Kbel dne 13. května 1911. S událostí se můžeme teoreticky seznámit ještě i z ústního vyprávění, dobových fotografií či pátrat po záznamech např. na Katedře fyziky University v Pardubicích. Matematická forma zápisu však přiřadí pouze veličiny alokující událost jednoznačným způsobem v prostoru (např. pomocí zeměměřické sítě poledníků a rovnoběžek) a čase (s pevně definovaným místním časem), např. (φ, λ, t), kde φ značí zeměpisnou šířku, λ zem. délku a t čas, obr.1. Při znalosti několika těchto n-tic během této události, např. ze zapisovače polohy a údaje stopek umístěných přímo v letounu, je možno zrekonstruovat charakteristiku letu, tj. start a cíl, kinematické letové veličiny včetně rychlosti, zrychlení, odchylky od přímé trasy atp. Je-li známa hmotnost stroje pak i dynamiku letu, namáhání jednotlivých části stroje aj.



Obr.1 Zeměpisné souřadnice φ, λ jako složky polohového vektoru.

Vlastnosti a klasifikace vektorů

Z předcházejícího odstavce plyne, že prostorovou informaci má smysl kvantifikovat vzhledem k nějaké **vztažné soustavě**. Zároveň je třeba si uvědomit, že veškeré fyzikální děje se odehrávají nezávisle na volbě takové soustavy, a tedy i příslušné fyzikální zákony obsahující vektorové veličiny jsou nezávislé na volbě jejího souřadnicového systému. Tím se stává vektorový zápis jednodušším a přehlednějším.

Nejběžnější souřadné soustavy obsahují kromě **pevně zvoleného počátku *O*** systém os nebo úhlů a podle toho jsou označovány:

1. **Soustava kartézská orthogonální** (pravoúhlá), nazvaná podle jejího objevitele francouzského fyzika a matematika René Descarta, sestávající ze tří navzájem kolmých os, např. x,y,z protínajících se v počátku souřadnic O. Na těchto osách se vynáší kladné, resp. záporné souřadnice.
2. **Soustava cylindrická** (válcová), v níž prvá a druhá souřadnice jsou nahrazeny poloměrem $r > 0$ a úhlem φ v obloukové míře ($0 \leq \varphi < 2\pi$), který se odečítá od dané poloosy vycházející z počátku, např. od osy x v kladném směru a proti směru hodinových ručiček. Třetí z-tová (kartézská) souřadnice zůstává beze změny.
3. **Soustava sférická** (kulová) s poloměrem $r \geq 0$ a dvěma úhly α a β je vhodná všude tam, kde fyzikální objekt vykazuje kulovou symetrii (v rovině kruhovou). Prvá souřadnice představuje opět vzdálenost bodu od počátku, taktéž úhel φ leží v rovině os x,y se stejnou konvencí jeho odečtu jako u cylindrické soustavy. Poslední souřadnicí je úhel Φ ($0 \leq \Phi < 2\pi$)odečítaný od kladné poloosy z (v obr.1 od severního pólu).

Poznámka:

1. Toto rozdělení souřadných soustav včetně počtu nezávislých souřadnic je pro třírozměrný prostor. Bádavý čtenář si snadno provede analogii pro dvourozměrný případ a ostatní jsou doporučeni na patřičnou literaturu na konci tohoto pojednání. Tamtéž lze dohledat i příslušné **transformační vztahy** mezi těmito souřadnými soustavami.

2. Je-li v orthogonální kartézské soustavě zaveden jednotkový vektor (viz dále) coby měřítko pro souřadnici 1 na všech třech osách, označuje se **soustava orthonormální**.

Pro práci s vektory je pak třeba z matematického hlediska vytvořit jistý tzv. **afinní vektorový prostor**, ve kterém se vektory stanou **prvky** tohoto prostoru se všemi právy a povinnostmi z toho vyplývajícími. Tímto krokem se mj. vymezí i pravidla pro **operace s vektory**, resp. vyloučí ty neposlušné prvky - vektory, které patří do jiné soustavy nebo prostoru.

Klasifikace vektorů

Ve fyzice se rozlišují tyto základní typy vektorů:

- **vázaný** (pevný) vektor nemůže nijak měnit svou polohu, je pevně vázán na určitý bod (např. rychlost v určitém místě rotujícího tělesa),

- **klouzavý** vektor je vázán na určitou přímku, podél které se může libovolně posouvat za předpokladu, že se nemění původní účinek na okolní těleso (tělesa), např. síla působící na dokonale tuhé těleso,

- **volný** vektor je pouze vázan určitým směrem, který představuje např. množina rovnoběžných přímek, s jejichž částmi je možno volný vektor ztotožnit: de facto se vektor skrze nich prostorem volně posouvá, příkladem je moment silové dvojice působící na dokonale tuhé těleso.

Vlastnosti vektorů

Vektor se ve své nejjednodušší podobě sestává z ***n*-tice čísel**, ve které **záleží na pořadí**. Toto pořadí se musí předem zadat a tedy musí být znám i klíč či předpis, který význam jednotlivých pozic této uspořádané *n*-tice čísel obsahuje. Přirozené číslo *n* udává dimensi či ‘rozměrovost‘, méně pěkně ‘metriku‘ (afinního) vektorového prostoru, která musí být dostačující pro úplný popis každého prvku - vektoru, který do něj náleží, značí se E^n. U vektorů s $n \geq 1 \; \therefore \; \boldsymbol{a} \in E^1$ se již rozlišují výše zmíněné atributy: **velikost**, **směr**, **orientace** a u vázaných vektorů **působiště**.

Graficky si lze představit vektory jako **orientované úsečky**, které musí splňovat určité vlastnosti, aby je bylo možno do uvažovaného vektorového prostoru zahrnout. Toto je zpravidla splněno, vyhoví-li určitý prvek - vektor jistým **transformačním vztahům** (viz dále). Podle formy vyjádření se uspořádaná *n*-tice čísel označuje také **aritmetický** vektor, orientovaná úsečka pak **grafický** vektor.

Mezi nejdůležitější kritéria vektorové algebry pro zařazení vektorů do určitého vektorového prostoru E^n patří **operace součtu** dvou vektorů ***a***, ***b*** (3) a **operace násobení reálným číslem** α (2):

$$\boldsymbol{a} \in E^n, \alpha \in R \rightarrow \alpha \cdot \boldsymbol{a} \in E^n \tag{2}$$

$$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in E^n \rightarrow (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \in E^n \tag{3}$$

Další operace definují produkty opět mezi operandy – vektory ***a***, ***b***, ***c***; $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in E^n$ a reálnými čísly α, β; $\alpha, \beta \in R$ pomocí aritmetických operátorů, resp. matematických zákonů komutativnosti (4), asociativnosti (5,6), resp. disociativnosti (7,8):

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} \tag{5}$$

$$(\alpha\beta)\boldsymbol{a} = \alpha(\beta \cdot \boldsymbol{a}) = \beta(\alpha \cdot \boldsymbol{a}) \tag{6}$$

$$(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha \cdot \boldsymbol{a} + \beta \cdot \boldsymbol{a} \tag{7}$$

$$\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha \cdot \boldsymbol{a} + \alpha \cdot \boldsymbol{b} \tag{8}$$

a jiné uvádějí existenci **nulového** (9)-(11), **jednotkového** (11) a **opačného prvku** (12)-(14) v příslušném vektorovém prostoru E^n:

$$\boldsymbol{a} + \vec{o} = \boldsymbol{a} \tag{9}$$

$$0 \cdot \boldsymbol{a} = \vec{o} \tag{10}$$

$$\alpha \cdot \vec{o} = \vec{o} \tag{11}$$

$$1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \vec{o} \tag{13}$$

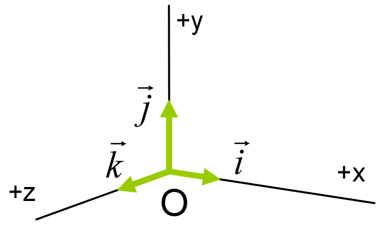
$$\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\ \Rightarrow \boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c} \tag{14}$$

$$-(\alpha\,\boldsymbol{a})=(-\alpha)\boldsymbol{a}=\alpha(-\boldsymbol{a}) \tag{15}$$

Jednotkový vektor $|\vec{a}|=1$ má svoje význačné postavení nejen ve fyzice a pomocí něj se definují např. **vektory elementárního posuvu**

$$d\vec{s}=dx\cdot\vec{i}+dy\cdot\vec{j}+dz\cdot\vec{k} \tag{16}$$

nebo **vektory báze** $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ v často používaném tzv. **souřadnicovém prostorovém kříži**, obr.2:



Obr.2 Prostorový orthogonální souřadnicový systém s vektory báze ***i,j,k****.*

Právě tato souřadnicová soustava má přirozeně v našem trojrozměrném chápání prostoru své význačné místo a má-li navíc osy ve směrech navzájem kolmých a jednotkové vektory orientovány dle obr.2, pak se nazývá **orthogonální** (pravoúhlý) **pravotočivý souřadnicový kříž**, či **kartézský** jak bylo uvedeno výše (platí-li navíc $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ jde o **orthonormální** souřadnicový kříž).

Operace **odčítání vektorů** se převádí na operaci sečtení s vektorem opačným (viz (14)) a operace podílu dvou vektorů není definována.

Skalární součin

Rozšíří-li se platnost relací (2)-(15) o operaci tzv. **skalárního součinu** mezi dvěma vektory ***a***,***b*** (značí se $\vec{a}\cdot\vec{b}$), pak dosavadní část afinního prostoru E^n se stává **euklidovským prostorem** se svými výhodnými vlastnostmi užitými i v jiných oblastech matematiky (např. geometrie). Pro základní představu o euklidovském prostoru stačí uvést, že při všech transformacích zůstávají **vzdálenosti** mezi dvěma body a **úhly** mezi dvěma směry **zachovány**. Skalární součin je **zobrazení**, kterým se dvěma vektorům přiřadí reálné číslo (odtud název *skalární*) a kromě shora uvedených vztahů pro něj platí:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} \tag{17}$$

$$\alpha(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\alpha\,\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}(\alpha\,\boldsymbol{b}) \tag{18}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geq 0,\ \textit{symbolicky}\ \boldsymbol{a}^2 \tag{20}$$

$$a=|\vec{a}|=\sqrt{a^2}=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} \tag{21}$$

$$a\cdot b=b\cdot a \tag{22}$$

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leq|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\quad \text{Cauchyho-Buňakovského nerovnost} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\qquad \text{podmínka orthogonality} \tag{24}$$

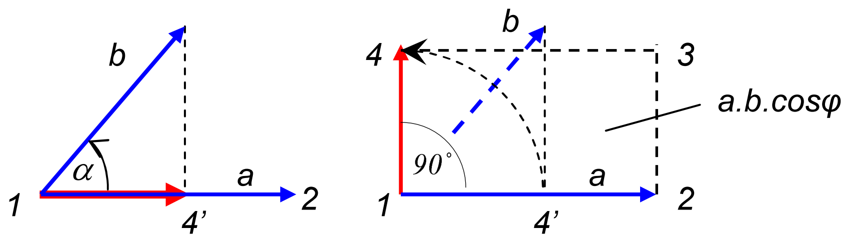
Pro skalární součin tří vektorů neplatí asociativní zákon

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\neq(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \tag{25}$$

Velikost skalárního součinu $\vec{a} \cdot \vec{b}$ je jediným produktem vztahu

$$a \cdot b = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi\,, \tag{26}$$

kde úhel φ svírají tyto vektory. Geometrickou interpretací skalárního součinu je pak **obsah obdélníka**, jehož jednou stranou je velikost jednoho vektoru a druhou stranou je průmět druhého vektoru do směru vektoru prvního (obr.3):



*Obr.3 Plošný obsah obdélníku 1234 jako geometrická interpretace skalárního součinu vektorů **a** a **b**.*

Dalším důležitým pojmem je tzv. **lineární kombinace vektorů**, která se používá při zavedení souřadných systémů (bází) předpisem

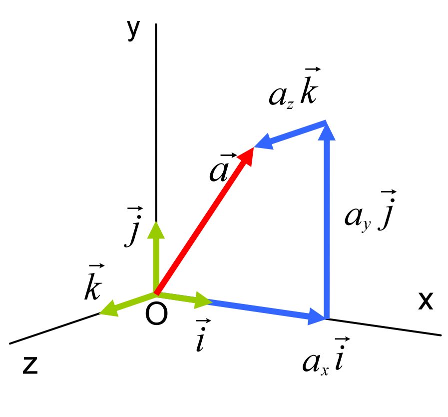
$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n\,, \tag{27}$$

o kterém předpokládáme, že vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, n – rozměr (dimense) euklidovského prostoru E^n, jsou lineárně nezávislé, je-li lineární kombinace vektorů rovna nulovému vektoru tehdy a jen tehdy, platí-li

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \tag{28}$$

Vyjádření vektoru pomocí jeho souřadnic

Každý vektor lze v n-rozměrném euklidovském prostoru rozložit do vektorů ležících v osách příslušného systému souřadnic – **báze**. V případě $n = 1$ se báze sestává pouze z jediného representanta, např. jednotkového vektoru $\vec{i}$, který je kolineární se všemi dalšími vektory. Ve dvourozměrném prostoru ($n = 2$) již mají vektory o jeden stupeň volnosti více, a tedy k popisu bude zapotřebí nejméně dvou lineárně nezávislých **vektorů báze**, např. ***i***,***j***. V našem trojrozměrném prostoru pak postačí zavést tři jednotkové vektory ***i***,***j***,***k***, obr.4, do jejichž směrů lze již snadno promítnout počáteční a koncový bod původního vektoru ***a***:



*Obr.4 Rozklad vektoru $\vec{a}$ ve složky v orthogonálním souřadnicovém systému **i**,**j**,**k**.*

Jsou-li tyto průměty kolmé k příslušným osám, jedná se o orthogonální souřadnicový systém a vektoru ***a*** se přiřadí uspořádaná n-tice čísel a_i, i =1,2,…,n, zápisem:

$$\vec{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right), \tag{29}$$

kde pro třírozměrný prostor (n = 3) platí

$$a_x = x_2 - x_1; a_y = y_2 - y_1; a_z = z_2 - z_1, \tag{30}$$

a tedy takový vektor lze přehledně zapsat

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \tag{31}$$

Jednotkové vektory báze mají složky $\boldsymbol{i} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{j} = (0,1,0)$ a $\boldsymbol{k} = (0,0,1)$, vektor $\boldsymbol{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$ se nazývá též **polohový vektor** či nevhodně **radiusvektor**. Obráceně, pomocí jednotkových vektorů báze a skalárního součinu lze určit složky původního vektoru:

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{i};\ a_y = \vec{a} \cdot \vec{j};\ a_z = \vec{a} \cdot \vec{k} \tag{32}$$

Dva vektory ***a***,***b*** se považují shodné, shodují-li se i jejich odpovídající kartézské souradnice (platí pro volné vektory):

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \ \Leftrightarrow\ a_i = b_i\ \forall i \in n;\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in E^n \tag{33}$$

Na základě vztahů (26)-(28) a vlastností euklidovského prostoru se snadno vyjádří **součet vektorů** jako

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \left(a_1 + b_1; a_2 + b_2; \ldots; a_n + b_n\right) \tag{34}$$

a **součin vektoru a čísla**:

$$\alpha\, \boldsymbol{a} = \left(\alpha\, a_1; \alpha\, a_2; \ldots; \alpha\, a_n\right) \tag{35}$$

V obou vztazích udává n opět rozměr euklidovského prostoru E^n, a tedy i pro **nulový** (36) a **opačný** prvek (37) se musí každá dimenze adekvátně doplnit:

$$\vec{o} = \left(0; \ldots; 0_n\right) \tag{36}$$

$$-\boldsymbol{a} = \left(-a_1; -a_2; \ldots; -a_n\right) \tag{37}$$

Poznámka:
Čísla a_x, a_y, a_z se často poněkud nepřesně značí také jako **složky** vektoru ***a***, proto je třeba rozlišit zápisem **vektorové složky** $\left(a_x \cdot \vec{i}; a_y \cdot \vec{j}; a_z \cdot \vec{k}\right) = \left(\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z\right)$ tam, kde to není na první pohled zřejmé.

Velikost vektoru *a* (nazývaná též délka, velikost, absolutní hodnota, norma nebo modul vektoru), obr.4, se pak snadno vyjádří jako

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2} = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2} \tag{38}$$

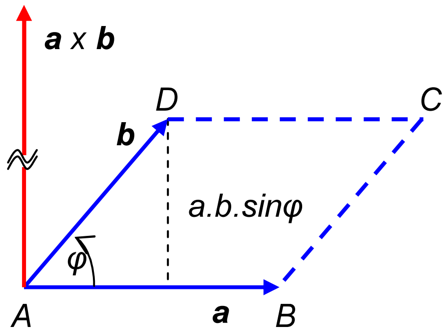
Tímto předpisem se přiřadí invariant (skalár) vyjadřující ‚mohutnost’ vektoru.

Vektorový součin

Kromě skalárního součinu bylo též zapotřebí zavést **součin vektorový** předpisem

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c};\ \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in E^n \tag{39}$$

jehož **produktem** je **vektor** $\boldsymbol{c}$ kolmý na rovinu, v níž leží původní vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, obr.5, ($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in E^n$):



*Obr.5 Geometrická interpretace vektorového součinu **a** x **b**.*

a jeho **velikost** je dána

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\sin\varphi\,, \tag{40}$$

kde úhel φ opět svírají tyto vektory. **Číselně** je pak velikost vektorového součinu rovna **obsahu rovnoběžníka** *ABCD* sestrojeného z obou vektorů a jeho orientace je dána pravidlem pravé ruky, obr.5. Pro $n = 3$, tj. v našem třírozměrném prostoru, se **složky vektorového součinu** vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ dají spočítat z determinantu, zaplníme-li jej postupně odshora jednotkovými vektory báze, na druhém řádku složkami prvého a na posledním řádku složkami druhého vektoru:

$$\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k} \tag{41}$$

tedy

$$c_x=a_yb_z-a_zb_y;\ c_y=a_zb_x-a_xb_z;\ c_z=a_xb_y-a_yb_x \tag{42}$$

Pořadí vektorů nelze zaměniti, neb vektorový součin **není** komutativní:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\left(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\right) \tag{43}$$

ale je **distributivní**

$$\boldsymbol{a}\times\left(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\right)=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} \tag{44}$$

Poznámka k zápisu:

1. Vektory značíme v textu zvýrazněnou kurzívou, nebo šipkou nad symbolem psaným kurzívou, ne však kombinovaně (zvýrazněné písmo se šipkou).
2. S operátory sčítání a vektorového součinu se lze ještě v literatuře setkat zápisem v kroužku $\oplus,\otimes$. Symbol operace skalárního součinu je centrovaná tečka, nelze ji psát

na účaří: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. V ASCII kódu ji lze vložit kombinací kláves <ALT> + <0183> (ALT 0183).

Příklady

1. Ověřte nelineární závislost jednotkových vektorů báze ortogonálního pravotočivého souřadnicového systému. [dle vztahu (27), resp. (28)]
2. Proveďte součet a rozdíl vektorů $\boldsymbol{a}$ = 1, $\boldsymbol{b}$ = 2 svírajících úhel 30˚. [2.9;1.24]
3. Určete skalární i vektorový součin vektorů $\boldsymbol{a}$ = (1,2,3) a $\boldsymbol{b}$ =(3,2,1). $[10; -4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}\,]$

Doporučená literatura:

[1.] Kvasnica J.: Matematický aparát fyziky, Academia, Praha, 1989.
[2.] Vošický Z.: Matematika v kostce, 2. vyd., ISBN 80-7200-333-X, Fragment, Havlíčkův Brod, 1999.
[3.] Rektorys K.: Přehled užité matematiky, SNTL, Praha, 1981.
[4.] Arfken G.: Mathematical methods for physicists, Academic Press, San Diego, 1985.